چطور رسم کنیم؟

مثلث غیرخاص

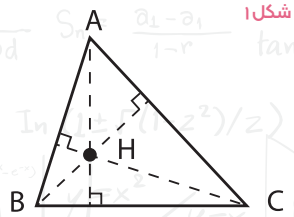
- فاطمه معین‌الدینی
- جلال سرحدی
- حسین کریمی

یکی از مهم‌ترین قسمت‌های درس هندسه، رسم شکل‌هاست. برای رسم یک شکل باید اطلاعات لازم را داشته باشیم. مثلاً برای رسم یک دایره باید مرکز و اندازهٔ شعاع آن را و برای رسم یک مثلث باید اندازهٔ سه ضلع و یا اطلاعاتی را که بتوان به کمک آن‌ها اندازهٔ سه ضلع را به‌دست آورد، داشته باشیم. یکی از زیبایی‌های درس هندسه آن است که بتوانیم با اطلاعات کم به اطلاعات کافی دست پیدا کنیم. از این رو تصمیم گرفتیم با مطرح کردن یک سلسله مسئله در هر شماره از مجله، به روش رسم شکل‌های معینی بپردازیم.

در این شماره می‌خواهیم با طرز رسم مثلث (غیرخاص) با فرض در دست داشتن اطلاعاتی متفاوت آشنا شویم. به این منظور چند نکته را در مورد مثلث یادآوری می‌کنیم:

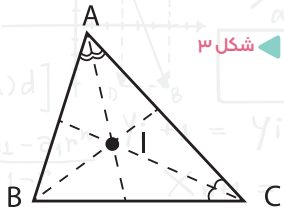
۱ در هر مثلث سه ارتفاع در یک نقطه (H ـ مرکز ارتفاعیه) (شکل ۱)، سه میانه در یک نقطه (G ـ مرکز ثقل) (شکل ۲) و سه نیم‌ساز زاویهٔ داخلی نیز در یک نقطه (I ـ مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ـ نقطه‌ای که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است) (شکل ۳) به هم می‌رسند که می‌گوییم همرس‌اند.

شکل ۱



شکل ۲

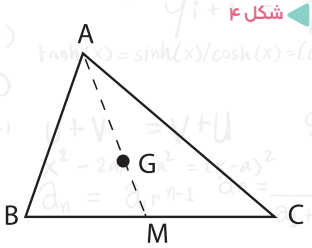
شکل ۳



۲ در هر مثلث اندازهٔ میانه در نقطهٔ همرسی میانه‌ها به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌شود (شکل ۴)؛ یعنی: AG=۲GM و به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} GA = \frac{۲}{۳}AM = \frac{۲}{۳}m_a \\ GM = \frac{۱}{۳}AM = \frac{۱}{۳}m_a \end{cases}$$

شکل ۴



۳ امتداد دو ضلع یک زاویه نسبت به نیم‌ساز آن زاویه، قرینهٔ یکدیگرند (شکل ۵).

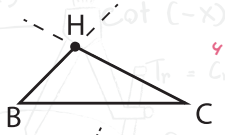
شکل ۵

۴ دو مثلث را متشابه گوییم هرگاه اندازهٔ زاویه‌های متناظر یکسان و اضلاع متناظر متناسب باشند. در صورتی که دو مثلث متشابه باشند و نسبت دو ضلع متناظر K باشد، آن‌گاه نسبت اندازهٔ ارتفاع‌های متناظر و نسبت اندازهٔ میانه‌های متناظر و نسبت اندازهٔ نیم‌سازهای متناظر نیز K خواهد بود.

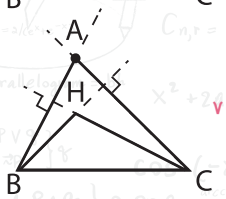
۱ از مثلث ABC دو رأس B و C و نقطهٔ برخورد سه ارتفاع (H) را داریم (شکل ۶). مثلث را رسم کنید.

حل: با در دست داشتن سه نقطهٔ B، C و H مثلث BCH را رسم می‌کنیم. از رأس B عمودی بر امتداد CH و از رأس C عمودی بر امتداد BH رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی دو امتدادی که رسم کرده‌ایم را A می‌نامیم. مثلث ABC (شکل ۷) جواب مسئله است.

شکل ۶



شکل ۷

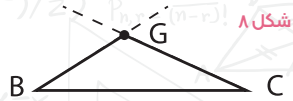


۲ از مثلث ABC دو رأس B و C و نقطهٔ برخورد سه میانه (G) را داریم (شکل ۸). مثلث را رسم کنید.

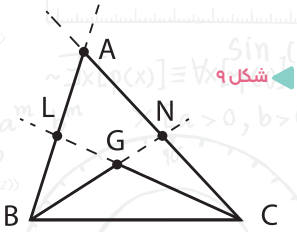
حل: با در دست داشتن سه نقطهٔ B، C و G مثلث BCG را رسم می‌کنیم. CG را از سمت G به اندازهٔ نصفش تا L و BG را نیز از سمت G به اندازهٔ نصفش تا N امتداد می‌دهیم.

امتداد BL و CN یکدیگر را در A قطع می‌کنند. مثلث ABC (شکل ۹) جواب مسئله است.

شکل ۸



شکل ۹



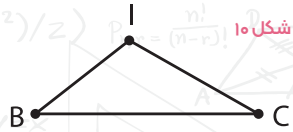
۳ از مثلث ABC دو رأس B و C و نقطهٔ برخورد سه نیم‌ساز زاویهٔ داخلی (I) را داریم (شکل ۱۰). مثلث را رسم کنید.

حل: با در دست داشتن سه نقطهٔ B، C و I مثلث BCI را رسم می‌کنیم.

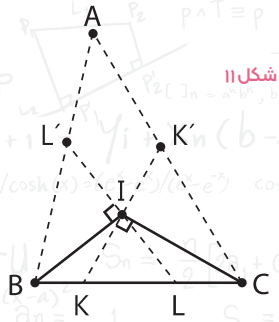
چون CI نیم‌ساز زاویهٔ داخلی C در مثلث ABC است، با رسم قرینهٔ امتداد BC نسبت به نیم‌ساز CI، امتداد CA به‌دست می‌آید. به این منظور از I عمودی بر CI رسم می‌کنیم تا BC را در K قطع کند. قرینهٔ K را نسبت به I، K′ می‌نامیم. امتداد CK′ همان امتداد CA خواهد بود.

به همین ترتیب قرینهٔ امتداد BC را نسبت به BI رسم می‌کنیم که همان امتداد BL′ خواهد بود. نقطهٔ تلاقی امتداد BL′ و CK′ را A می‌نامیم. مثلث ABC (شکل ۱۱) جواب مسئله است.

شکل ۱۰



شکل ۱۱



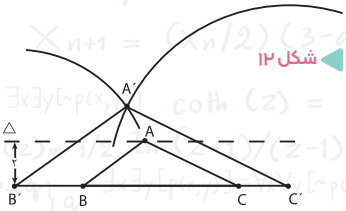
۴ با فرض $AH=h_a=۲$، $BH_۱=h_b=۳$ و $CH_۲=h_c=۴$، مثلث ABC را رسم کنید.

حل: با توجه به $a.h_a=b.h_b=c.h_c=۲S$ داریم: $c=\frac{۲s}{۴}$ و $b=\frac{۲s}{۳}$ و $a=\frac{۲s}{۲}$ و به‌عبارت دیگر $BC=a=۶k$، $AC=b=۴k$ و $AB=c=۳k$.

با فرض $k=۲$، مثلث $A'B'C'$ را رسم می‌کنیم و خط Δ را به موازات $B'C'$ و به فاصله ۲ از آن در نظر می‌گیریم (شکل ۱۲).

نقطهٔ دلخواه A را روی Δ اختیار و از آن نقطه به موازات $A'B'$ و $A'C'$ دو خط رسم می‌کنیم تا به ترتیب را در نقطه‌های B و C قطع کند.

شکل ۱۲



مثلث ABC جواب مسئله است.

۵ حدود m را چنان بیابید که بتوانیم مثلثی با ارتفاع‌های $h_a=\frac{۱}{۲}$ ، $h_b=\frac{۱}{۳}$ و $h_c=\frac{۱}{m}$ را رسم کنیم.

حل: $a=\frac{۲s}{h_a}, b=\frac{۲s}{h_b}, c=\frac{۲s}{h_c}$

$\Rightarrow a=۴s\ ,\ b=۶s\ ,\ c=۲ms$

با توجه به نامساوی مثلثی، یعنی در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع، بزرگ‌تر از اختلاف اندازهٔ دو ضلع دیگر و کوچک‌تر از مجموع اندازهٔ دو ضلع دیگر است، داریم:

$|a-b|<c<a+b$

$\Rightarrow |۴s-۶s|<۲ms<۴s+۶s$

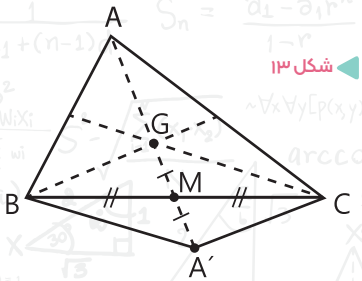
$\Rightarrow ۱<m<۵$

با فرض $h_a=\frac{۱}{۲}$ و $h_b=\frac{۱}{۳}$، هرگاه اندازهٔ ارتفاع h_c بین یک تا $\frac{۱}{۵}$ باشد، می‌توان مانند مسئلهٔ ۴ مثلث ABC را رسم کرد.

۶ با در دست داشتن اندازهٔ سه میانه، $m_a=۹$، $m_b=۱۲$ و $m_c=۱۵$، مثلث ABC را رسم کنید.

حل: فرض کنیم مثلث ABC را داشته باشیم (شکل ۱۳). با امتداد GM به اندازهٔ خودش از سمت M نقطهٔ A′ به‌دست می‌آید. از وصل کردن A′ به C نیز به یک چهارضلعی می‌رسیم که دو قطر آن (BC و GA′) منصف یکدیگرند. پس چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. اکنون با معلوم بودن $BG=\frac{۲}{۳}m_b=۸$ ، $BA'=CG=\frac{۲}{۳}m_c=۱۰$ و $GA'=۲GM=\frac{۲}{۳}m_a=۶$، مثلث BGA′ قابل رسم است. با M نامیدن وسط GA′، کافی است قرینهٔ B را نسبت به M، C بنامیم و قرینهٔ A′ را نسبت به G، A در نظر بگیریم. مثلث ABC جواب مسئله خواهد بود.

شکل ۱۳

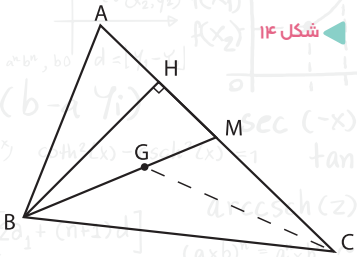


۷ مثلث ABC را با معلوم بودن دو میانهٔ $m_b=۱۵$ و $m_c=۱۸$ و ارتفاع $h_b=۱۲$ رسم کنید.

حل: با توجه به شکل ۱۴، مثلث قائم‌الزاویه BHM که در آن داشته باشیم: BH=۱۲ و BM=۱۵ قابل رسم است.

چون: $GM=\frac{m_b}{۳}=۵$ ، بنابراین نقطهٔ G هم قابل تعیین است. می‌دانیم: $GC=\frac{۲}{۳}m_c=۱۲$ ، پس دایره‌ای به مرکز G و به شعاع ۱۲ رسم می‌کنیم تا امتداد HM را در C قطع کند. قرینهٔ C را نسبت به M، A می‌نامیم. مثلث ABC جواب مسئله است.

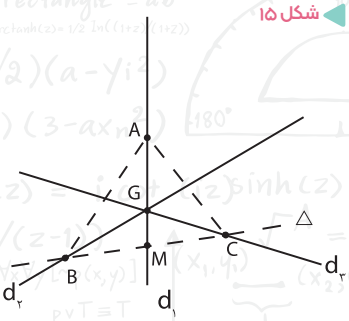
شکل ۱۴



۸. سه خط d_1، d_2 و d_3 از نقطهٔ G می‌گذرند. نقطهٔ دلخواه A را از d_1 در نظر بگیرید. نقطه‌های B از d_2 و C از d_3 را چنان تعیین کنید که میانه‌های مثلث ABC روی خط‌های d_1، d_2 و d_3 باشند.

حل: AG را از سمت G به اندازهٔ نصفش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ M برسیم (شکل ۱۵). خط Δ را گذرا از M چنان رسم می‌کنیم که d_2 را در B و d_3 را در C قطع کند و داشته باشیم: BM=MC. مثلث ABC جواب مسئله است.

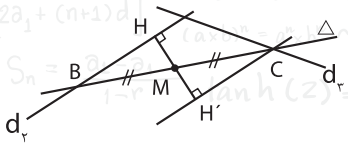
شکل ۱۵



طرز رسم خط Δ

از M عمودی بر d_2 رسم می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم (شکل ۱۶). قرینهٔ H نسبت به M را H′ در نظر می‌گیریم. از H′ به موازات d_2 خطی رسم می‌کنیم تا d_3 را در C قطع کند. امتداد CM همان خط Δ است.

شکل ۱۶

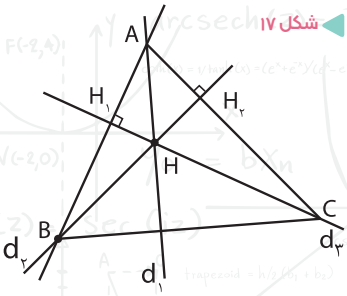


۹. سه خط همرس d_1، d_2 و d_3 و نقطهٔ A روی d_1 داده شده‌اند. مثلثی رسم کنید که این سه خط ارتفاع‌های آن و نقطهٔ A یک رأسش باشد.

حل: از نقطه A عمودی بر d_3 رسم می‌کنیم (AH_1) و آن را امتداد می‌دهیم تا d_2 را در B قطع کند (شکل ۱۷). از A عمودی بر d_2 رسم می‌کنیم (AH_2) و آن را امتداد می‌دهیم تا d_3 را در C قطع کند.

مثلث ABC جواب مسئله است.

شکل ۱۷



۱۰. در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = ۶۴^\circ$، $\hat{B} = ۷۰^\circ$ و $|AC| - |AB| = ۵$. مثلث ABC را رسم کنید.

حل: با داشتن سه زاویه نمی‌توانیم یک مثلث مشخص را رسم کنیم. برای رسم باید یک پاره‌خط ثابت داشته باشیم. با توجه به اینکه: $|AC| - |AB| = ۵$، روی ضلع بزرگ (AC) به اندازهٔ ضلع AB جدا می‌کنیم که به دو مثلث متساوی‌الساقین (ABD) و یک مثلث دیگر به ضلع CD=۵ مانند شکل ۱۸ می‌رسیم.

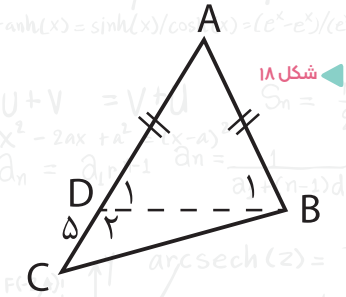
$$\hat{A} = ۶۴^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 = \frac{۱۸۰^\circ - ۶۴^\circ}{۲} = ۵۸^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D}_2 = ۱۲۲^\circ,$$

$$\hat{C} = ۱۸۰^\circ - ۶۴^\circ - ۷۰^\circ = ۴۶^\circ$$

شکل ۱۸

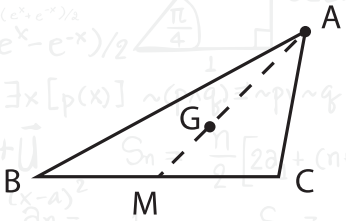


پس برای رسم مثلث ABC ابتدا مثلث BCD را با در دست داشتن $\hat{C} = ۴۶^\circ$ و DC=۵ و $\hat{D}_2 = ۱۲۲^\circ$ رسم می‌کنیم. سپس مثلث متساوی‌الساقین BDC را با داشتن دو زاویه ۵۸° روی قاعدهٔ BD بنا می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.

حل مسئلهٔ ۲: روش دوم

وسط ضلع BC را M می‌نامیم (شکل ۱۹). از M به G وصل می‌کنیم و به اندازهٔ دو برابر MG امتداد می‌دهیم تا به A برسیم. مثلث ABC جواب مسئله است.

شکل ۱۹



حل مسئلهٔ ۳: روش دوم

I نقطهٔ همرسی نیم‌سازهاست، پس فاصله‌اش از سه ضلع یکسان است (شکل ۲۰). از I بر BC عمودی رسم می‌کنیم (IH). سپس دایره‌ای به مرکز I و به شعاع IH می‌کشیم. دو مماس رسم شده از B و C بر دایره یکدیگر را در A قطع می‌کنند. مثلث ABC جواب مسئله است.

شکل ۲۰